



---

**Universidad de Valladolid**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**Grado en Óptica y Optometría**

**MEMORIA TRABAJO FIN DE GRADO TITULADO**

**“LA GEOMETRÍA DE LOS RAYOS DE LUZ Y EL PROBLEMA DE  
OBSERVACIÓN ASTRONÓMICA”**

**Presentado por Raúl Santamaría Domínguez**

**Tutelado por Francisco Vicente Ruiz**

**Tipo de TFG: Revisión**

**En Valladolid, a 21 de mayo de 2016**

Santamaría R.

“La geometría de los rayos de luz y el problema de observación astronómica”

## ÍNDICE

RESUMEN.....	4
ABSTRACT .....	4
INTRODUCCIÓN.....	5
1. PRINCIPIOS DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA CLÁSICA.....	6
1.1. Camino óptico y Principio de Fermat .....	6
1.2. Reflexión y Refracción .....	6
1.3. Espacios ópticos y la óptica Gausiana .....	7
1.4. La ecuación de los rayos de luz.....	7
2. IDEA DE DISTANCIA EN EL ESPACIO $R^3$ .....	9
2.1. Idea del espacio de Minkowski .....	11
3. GEODÉSICAS EN UN ESPACIO DOTADO DE UNA MÉTRICA.....	13
4. GEODÉSICAS EN UN ESPACIO-TIEMPO ISÓTROPO .....	14
5. CONCLUSIONES.....	20
6. BIBLIOGRAFÍA.....	21

## **RESUMEN**

En los últimos tiempos se han hecho muchos avances en el campo de la astrometría. Una parte importante de esos avances ha sido la medida de las trayectorias de los rayos de luz teniendo en cuenta la presencia de un campo gravitatorio que deforma la geometría del espacio-tiempo. Este es el caso del Sol, que deforma la geometría de los rayos de luz curvando sus trayectorias. Esto afecta a la forma en la que un observador mira una fuente.

Con la ayuda del estudio de la geometría del espacio-tiempo, calcularemos un modelo que nos permitirá obtener la dirección en la que tendremos que apuntar nuestro telescopio para poder observar un planeta del sistema solar.

## **ABSTRACT**

In recent times there have been done many advances in the astrometry. An important part of these advances have been the extent of the trajectories of the light rays considering the presence of a gravitational field that change the geometry of the space-time. This is the case of the Sun, which changes the geometry of the rays bending their trajectories. This affects the way an observer looks to a source.

Helped by the study of the geometry of the space-time, we will calculate a model that allows us to get the direction in which we have to aim the telescope to observe a planet of the solar system.

## INTRODUCCIÓN

La óptica geométrica es un modelo matemático y aproximado que nos permite estudiar la luz considerando su propagación como energía radiante. Este modelo nos propone que la energía radiante se propaga en forma de rayos y no tiene en cuenta la naturaleza corpuscular y ondulatoria [1].

En la Antigüedad, el máximo exponente en el estudio de la luz fue Euclides (325 a.C.-265 a.C.). Este matemático griego, junto con otros como Ptolomeo (90 d.C.-168 d.C.) o Empédocles (495 a.C.-430 a.C.), defendía la teoría de que la luz viajaba desde el ojo al objeto que se observaba. También escribió varios postulados sobre las características de los cuerpos geométricos que sirvieron de inspiración para los que postularon la teoría ptolemaica.

La Edad Moderna supuso un periodo de gran avance en el campo de la óptica geométrica. En el año 1621, Willebrord Snel van Royen (1580-1626) descubre el fenómeno de la refracción con la ayuda de René Descartes (1596-1650), quien también propuso la teoría de que la luz se propagaba en un medio llamado éter. Treinta y seis años después de la formulación de la Ley de Snell, Pierre de Fermat (1601-1665) anuncia el principio que dicta que la luz para ir de un punto a otro recorre el espacio en el tiempo mínimo.

Fue Christiaan Huygens (1629-1695) quien en 1678 propuso, basándose en los estudios de Robert Hooke (1635-1703), que un punto estimulado por una onda luminosa se convierte en un emisor de frentes de onda esféricos. Sin embargo, para que fuera posible demostrar esto, haría falta la existencia del medio conocido como éter. De esta forma la luz se comportaría como una onda, igual que lo hace el sonido.

Como la Teoría de Huygens era incapaz de explicar la propagación rectilínea de la luz, Isaac Newton (1642-1727) la descartó y propuso un modelo corpuscular de la luz. Gracias a este modelo pudo explicar la naturaleza de la reflexión.

Durante el siglo XIX los científicos de la época desarrollaron la teoría del éter en gran profundidad. Se pensaba que la luz al tratarse de una onda transversal no podía moverse en el vacío, sino que necesitaba un medio para hacerlo. Para probar la existencia de este medio, Albert Abraham Michelson (1852-1931) y Edward Morley (1838-1923) decidieron realizar un experimento en 1887 en el que tratarían de medir la velocidad a la que se mueve la Tierra con respecto del éter utilizando un interferómetro. El resultado mostró que no había ningún éter y que la velocidad de la luz no variaba.

A raíz del fallo del experimento de Michelson y Morley, el físico Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) desarrolló la teoría de la contracción de Lorentz. Esta teoría dio pie a la aparición de la teoría de la relatividad especial de Albert Einstein (1879-1955).

# 1. PRINCIPIOS DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA CLÁSICA

## 1.1. Camino óptico y Principio de Fermat

El camino óptico es la longitud de espacio entre dos puntos que recorre la luz cuando viaja por un medio de índice de refracción  $n$ .

$$CO = \int_A^B n ds,$$

donde CO es el camino óptico y A y B son los dos extremos entre los que calculamos.

Si el medio por el que viajan los rayos de luz estudiados es homogéneo  $CO = nd$ , y  $d$  es la distancia que hay desde A hasta B.

A la hora de comprobar el camino óptico de un rayo de luz nos encontraremos que dicho rayo recorre la distancia AB en un tiempo mínimo. Esto es lo que se conoce como principio de Fermat.

El recorrido de la luz es extremal independientemente de los parámetros del medio en el que se realice el experimento. Si se tratara de un medio homogéneo, la luz seguiría una trayectoria rectilínea.

## 1.2. Reflexión y Refracción

Ambos fenómenos, tanto reflexión como refracción, suceden cuando un rayo incide con cierto ángulo sobre una superficie con un índice de refracción diferente al del medio de propagación inicial. Cuando esto ocurre parte de ese rayo de luz se refleja sobre la superficie y otra parte se refracta atravesando el material (Figura 1).

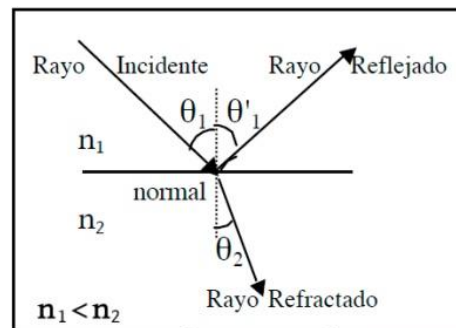


FIGURA 1: REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN.  
([HTTP://FISICA.LAGUIA2000.COM/GENERAL/REFRACCION-Y-REFLEXION](http://fisica.laguia2000.com/general/refraccion-y-reflexion))

Cumpliendo con el principio de Fermat, en la reflexión el rayo de luz recorre el espacio en el tiempo mínimo. Para que esto sea posible el ángulo con el que incide el rayo de luz respecto de la normal de la superficie de incidencia es igual al ángulo con el que sale reflejado respecto a esa normal.

$$\theta_1 = \theta'_1$$

En la refracción, sin embargo, el ángulo con el que se refracta el rayo respecto de la normal depende de los índices de refracción de ambos medios. Para calcular estos valores se utiliza la Ley de Snell.

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Si se da la situación de que el índice de refracción del primer medio es más grande que el del segundo, entonces habrá ángulos de incidencia en los que no obtengamos refracción sino que se dé el fenómeno de reflexión total. Sin embargo, gracias a la ley de Snell podemos calcular el ángulo límite que

delimita esta situación de reflexión total y una refracción normal. Es lógico entonces pensar que este ángulo límite será el ángulo de incidencia que consiga que  $\theta_2 = 90^\circ$ .

### 1.3. Espacios ópticos y la óptica Gausiana

En cualquier sistema óptico podemos encontrar dos espacios diferentes: el espacio objeto y el espacio imagen. Según las leyes de la óptica geométrica clásica, los rayos viajan desde el infinito de uno de los espacios y se mueven hacia el otro siguiendo una trayectoria rectilínea.

En un sistema óptico habitual no solo hay un espacio de cada, sino que cada cambio en la trayectoria de los rayos significará la aparición de un espacio imagen y un espacio objeto.

Según la óptica gausiana, una imagen es la aplicación del espacio objeto sobre el plano imagen. De esta forma, la imagen es un elemento conjugado del objeto y viceversa. Gracias a esta interpretación de las trayectorias de los rayos podemos calcular los elementos cardinales que caracterizan al sistema óptico, como son los planos principales y los planos focales.

### 1.4. La ecuación de los rayos de luz

Para deducir y explicar de forma adecuada la ecuación de los rayos de luz tomaremos una onda luminosa monocromática y plana

$$V(\vec{r}, t) = A(\vec{r})e^{i(\omega t - k_0 \Psi(\vec{r}))}$$

la cual se propaga por un medio de índice de refracción “n”. El símbolo  $\Psi$  expresa la función eikonal, que es la que verifica  $\Psi(\vec{r})$  si se describe la fase de la onda armónica. El componente  $A(\vec{r})$  nos indica la amplitud de la onda armónica,  $\omega$  representa la frecuencia angular,  $t$  será el tiempo y  $k_0$  nos indicará el número de onda.

Debemos saber que la curva de un rayo de luz, en la tangente de cada uno de sus puntos, tendrá la dirección de propagación de la energía. El vector unitario  $\vec{s}$  de esta dirección de propagación vendrá dado por:

$$\vec{s} = \frac{\vec{\nabla}\Psi}{\|\vec{\nabla}\Psi\|} = \frac{\vec{\nabla}\Psi}{n}$$

Si tenemos en cuenta que cualquiera que sea la función escalar  $\Psi$ ,  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\Psi) = 0$ , entonces

$$\vec{\nabla} \times (n\vec{s}) = 0$$

que servirá para cualquier trayectoria de un rayo de luz.

Si tomamos la ecuación de la trayectoria de un rayo de luz parametrizada por la longitud de arco  $\vec{r}(s)$

$$n \frac{d\vec{r}}{ds} = n\vec{s} = \vec{\nabla}\Psi$$

que, de esta forma constituye la “ecuación de los rayos de luz”.

Si diferenciamos esta ecuación de los rayos de luz

$$\frac{d}{ds}(\vec{\nabla}\Psi) = \frac{d}{ds}\left(n \frac{d\vec{r}}{ds}\right)$$

y a partir de esto llegaremos a

$$\frac{d}{ds}\left(n \frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \vec{\nabla}\Psi \quad (1)$$

Si consideramos que nos encontramos en un medio homogéneo, es decir, de índice de refracción constante

$$\frac{d}{ds}\left[n \frac{d\vec{r}}{ds}\right] = 0$$

cuya solución inmediata es que  $\frac{d\vec{r}}{ds} = cte$ , por lo tanto

$$\vec{r}(s) = \vec{a}s + \vec{b}$$

que es una ecuación vectorial de dirección  $\vec{a}$  y que pasa por un punto  $\vec{b}$ .



## 2. IDEA DE DISTANCIA EN EL ESPACIO $R^3$

En el espacio físico usual, el camino más corto para recorrer una distancia entre dos puntos es una recta. Para simplificar los cálculos es útil introducir un sistema de coordenadas que nos ayude a medir la distancia entre dos puntos. Una vez tengamos los ejes, el cuadrado de la distancia entre los dos puntos viene dado por la fórmula euclidiana:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Si nos fijamos detenidamente, la fórmula anterior puede expresarse como un producto escalar:

$$ds^2 = (dx, dy, dz) \cdot (dx, dy, dz) = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Si lo expresamos en forma matricial:

$$ds^2 = \begin{bmatrix} dx & dy & dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad (2)$$

A esta matriz de identidad que hemos añadido se la conoce como tensor métrico del espacio euclidiano  $R^3$ . Este tensor métrico nos permite tomar la medida de las distancias, las longitudes de curva y los ángulos en los espacios euclidianos, como vemos en [2] y en [3]. La fórmula (2) también la podemos escribir en la forma:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dx^i dx^j, \quad (3)$$

donde

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A esta última conclusión podemos llegar de la siguiente manera:

$$ds^2 = \begin{bmatrix} dx^1 & dx^2 & dx^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{bmatrix}$$

Al resolver el producto matricial obtendremos que:

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + 2g_{13}dx^1dx^3 + 2g_{23}dx^2dx^3 \quad (4)$$

La ecuación (4) podemos escribirla de forma más reducida, empleando el sumatorio como se ve en (3). Cuando nos encontramos con una expresión matemática de este tipo podemos aplicar el *Convenio de Sumación de Einstein*, el cual dicta que índices repetidos arriba y abajo implican suma, y escribir la ecuación de la forma

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$$

Podríamos decir entonces que:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

Por ejemplo, si en  $R^3$  utilizamos coordenadas esféricas los coeficientes métricos  $g_{ij}$  serían distintos. La relación entre las coordenadas cartesianas y las esféricas viene dada por las siguientes expresiones:

$$x = r \cos \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \sin \theta$$

En estas expresiones, el tensor métrico tiene la forma

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Para este sistema de coordenadas esféricas que hemos tomado, el cuadrado de la diferencial de la separación entre dos puntos es

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Si consideramos un arco de curva  $C$  definido en  $R^3$ , podemos calcular la longitud de dicho arco de curva. Para ello debemos tener en cuenta que

$$C \equiv x^i = x^i(u), \quad u_1 \leq u \leq u_2,$$

donde  $u_1$  y  $u_2$  serán los límites que definan la curva que estamos tratando. La fórmula de la longitud de arco será

$$s = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{du}} du$$

Si las coordenadas  $x^i$  fueran esféricas, la ecuación de la longitud de arco, como se puede ver en [4], tendría la forma

$$s = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{du}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2} du$$

En coordenadas cartesianas la ecuación de las geodésicas nos queda del tipo

$$\frac{d^2 x^i}{du^2} = 0$$

Si integramos esta ecuación diferencial, obtenemos

$$\frac{dx^i}{du} = c_1$$

y si la integramos de nuevo

$$x^i = c_1^i u + c_2^i$$

Si en vez de utilizar un sistema de coordenadas cartesiano consideramos un sistema de coordenadas curvilíneas, como son las esféricas, nos aparecerá una expresión conocida como símbolo de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i$ , que resultan ser 0 para un sistema de coordenadas cartesianas. Este símbolo nos permite escribir la ecuación de las geodésicas en un sistema de coordenadas no cartesiano, como vemos en [5], en [6] y en [7]. La ecuación de las geodésicas caracterizada con estos símbolos toma la forma

$$\frac{d^2 x^i}{du^2} + \Gamma_{jk}^i dx^j dx^k = 0 \quad (5)$$

## 2.1. Idea del espacio de Minkowski

Hasta ahora hemos estado trabajando en un sistema con tres dimensiones espaciales. Sin embargo a la hora de realizar una observación en el espacio, no miramos una localización de un objeto, sino un suceso.

Esta idea la introdujo Hermann Minkowski (1864-1909) en el año 1908 y nos da a entender que los cuerpos del espacio tridimensional se mueven a través de una dimensión temporal. Esto implicaría que los fenómenos físicos que tiene lugar en el sistema siguen una línea temporal y por tanto habrá que añadir a la métrica una nueva dimensión. De esta forma,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

pasará a ser, en el espacio de Minkowski,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 + dy^2 + dz^2$$

donde la nueva dimensión temporal está en función de la velocidad de la luz y del tiempo. Por comodidad, tomaremos la velocidad de la luz como  $c = 1$  y por tanto la nueva métrica tendrá la forma

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Es de esta forma como aparece la idea de espacio-tiempo de Minkowski, y es utilizada para explicar fenómenos según la teoría de la relatividad especial de Einstein, la cual nos dice que debemos añadir a la ecuación una cuarta dimensión compuesta por la velocidad de la luz en el vacío y el tiempo. Así, la ecuación será de la forma

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2,$$

donde la cuarta dimensión viene dada por  $c^2 dt^2$ , como vemos en [8]. Para el caso de una geodésica nula, esta ecuación se iguala a 0 y el resultado es que estas geodésicas son esferas concéntricas, en las que el radio vendría dado por  $c^2 dt^2$

$$c^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

de esta manera las geodésicas nulas tendrán forma de doble cono unido por el vértice, como se muestra en la figura 2. Este doble cono nos indica el horizonte visual de un punto en el espacio, es decir, que si observamos una estrella que se encuentra a una distancia  $s$  y a  $\frac{s}{c}$  segundos en el pasado, según este razonamiento, es imposible observar algo siguiendo una geodésica que salga del cono, ya que esta no seguiría la trayectoria temporal, sino que sería un suceso instantáneo. A esta representación también se la denomina cono de luz.

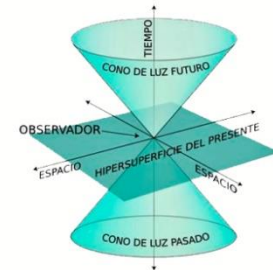


FIGURA 2: CONO DE LUZ.  
([HTTP://4.BP.BLOGSPOT.COM/-0TOPJXTHSHW/U6RGFF\\_VW4I/AAAAAAAAA-MA/E\\_RRRZEVD/S1600/QUE-ES-UN-CONO-DE-LUZ-1.JPG](http://4.bp.blogspot.com/-0TOPJXTHSHW/U6RGFF_VW4I/AAAAAAAAA-MA/E_RRRZEVD/S1600/QUE-ES-UN-CONO-DE-LUZ-1.JPG))

### 3. GEODÉSICAS EN UN ESPACIO DOTADO DE UNA MÉTRICA

Dado que la luz, como se ha comentado, recorre el camino más corto entre dos puntos, nos interesa el estudio de las curvas geodésicas que proporcionan la mínima distancia entre dos puntos de un espacio. En un espacio plano las geodésicas son rectas. Sin embargo en el espacio-tiempo, la distancia más corta entre dos puntos no será, en general, una recta. En presencia de un cuerpo masivo, habrá una deformación de la geometría y por tanto el camino más corto entre los dos puntos (observador y fuente) será una geodésica curva.

Como el espacio-tiempo es una variedad pseudoriemanniana con tres dimensiones espaciales y una temporal, utilizaremos una métrica  $(+ - - -)$ .

En espacios de este tipo, la ecuación (5) se formará calculando los símbolos de Christoffel a través de la métrica  $g_{ij}$  del espacio que estamos considerando. Para obtener esta métrica supondremos la presencia de un cuerpo masivo que deformara la geometría de la variedad y utilizaremos la ecuación desarrollada por Einstein

$$G_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = 8\pi GT_{ij}$$

donde  $R_{ij}$  es el tensor de Ricci (obtenido del tensor de Riemann), que al encontrarnos en un sistema de tres dimensiones espaciales y una temporal nos define totalmente la curvatura espacio-temporal. La constante  $G$  es la de gravitación universal y el coeficiente  $T_{ij}$  es el tensor de tensión-energía. El factor  $R$  es el escalar de curvatura del tensor de Ricci.

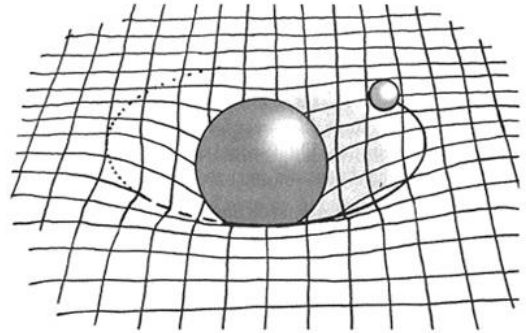


FIGURA 3: GEOMETRÍA DEL ESPACIO-TIEMPO  
([HTTP://WWW.LIBROSMARAVILLOSOS.COM/50COSAS-UNIVERSO/SECCION03.HTML](http://www.librosmaravillosos.com/50COSAS-UNIVERSO/SECCION03.HTML))

#### 4. GEODÉSICAS EN UN ESPACIO-TIEMPO ISÓTROPO

Las ecuaciones de Einstein fueron resueltas por Karl Schwarzschild (1873-1916) para el caso de un cuerpo masivo esférico estático, modificando las ecuaciones aplicadas en el espacio de Minkowski.

Por comodidad, pasaremos a utilizar un sistema de coordenadas isótropas. En estas coordenadas, el cuadrado del elemento de línea se escribe, como podemos ver en [10],

$$ds^2 = B(r, \theta, \varphi) dt^2 - A(r, \theta, \varphi) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (6)$$

donde los coeficientes  $B(r, \theta, \varphi)$  y  $A(r, \theta, \varphi)$  se explicarán más adelante. Esta métrica refleja de forma bastante aproximada la situación que planteamos: fuente y observador (planetas) que se mueven en el sistema solar. Si nos fijamos, si estos dos coeficientes de igualaran a 1, el resultado sería la ecuación del espacio de Minkowski pero con coordenadas esféricas en vez de cartesianas. Debemos tener en cuenta la simetría de los símbolos de Christoffel ( $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ ) y que para esta métrica los únicos que no se anulan son  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ ,  $\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1$ ,  $\Gamma_{14}^1 = \Gamma_{41}^1$ ,  $\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2$ ,  $\Gamma_{24}^2 = \Gamma_{42}^2$ ,  $\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3$ ,  $\Gamma_{34}^3 = \Gamma_{43}^3$ ,  $\Gamma_{24}^4 = \Gamma_{42}^4$  y  $\Gamma_{34}^4 = \Gamma_{43}^4$ . Entonces, las ecuaciones de las geodésicas (5) pasaran a ser

$$\begin{aligned} \frac{d(x^1)^2}{du^2} + 2\Gamma_{12}^1 \left( \frac{dx^1}{du} \right) \left( \frac{dx^2}{du} \right) + 2\Gamma_{13}^1 \left( \frac{dx^1}{du} \right) \left( \frac{dx^3}{du} \right) + 2\Gamma_{14}^1 \left( \frac{dx^1}{du} \right) \left( \frac{dx^4}{du} \right) &= 0, \\ \frac{d(x^2)^2}{du^2} + \Gamma_{11}^2 \left( \frac{dx^1}{du} \right)^2 + \Gamma_{22}^2 \left( \frac{dx^2}{du} \right)^2 + 2\Gamma_{23}^2 \left( \frac{dx^2}{du} \right) \left( \frac{dx^3}{du} \right) + 2\Gamma_{24}^2 \left( \frac{dx^2}{du} \right) \left( \frac{dx^4}{du} \right) \\ + \Gamma_{33}^2 \left( \frac{dx^3}{du} \right)^2 + \Gamma_{44}^2 \left( \frac{dx^4}{du} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d(x^3)^2}{du^2} + \Gamma_{11}^3 \left( \frac{dx^1}{du} \right)^2 + \Gamma_{22}^3 \left( \frac{dx^2}{du} \right)^2 + 2\Gamma_{23}^3 \left( \frac{dx^2}{du} \right) \left( \frac{dx^3}{du} \right) + \Gamma_{33}^3 \left( \frac{dx^3}{du} \right)^2 \\ + 2\Gamma_{34}^3 \left( \frac{dx^3}{du} \right) \left( \frac{dx^4}{du} \right) + \Gamma_{44}^3 \left( \frac{dx^4}{du} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d(x^4)^2}{du^2} + \Gamma_{11}^4 \left( \frac{dx^1}{du} \right)^2 + \Gamma_{22}^4 \left( \frac{dx^2}{du} \right)^2 + 2\Gamma_{24}^4 \left( \frac{dx^2}{du} \right) \left( \frac{dx^4}{du} \right) + \Gamma_{33}^4 \left( \frac{dx^3}{du} \right)^2 \\ + 2\Gamma_{34}^4 \left( \frac{dx^3}{du} \right) \left( \frac{dx^4}{du} \right) + \Gamma_{44}^4 \left( \frac{dx^4}{du} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Teniendo en cuenta que tomaremos  $x^1 = t$ ,  $x^2 = r$ ,  $x^3 = \theta$ ,  $x^4 = \varphi$ , las ecuaciones quedarán con la forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{du^2} + \frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial r} \left( \frac{dr}{du} \right)^2 - \frac{1}{2A} \left( 2rA + r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) \left( \frac{d\theta}{du} \right) - \left[ r \sin^2 \theta + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\ln A) \right] \left( \frac{d\varphi}{du} \right)^2 \\ + \frac{1}{2A} \frac{\partial B}{\partial r} \left( \frac{dt}{du} \right)^2 + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \theta} \left( \frac{d\theta}{du} \right) \left( \frac{dr}{du} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \left( \frac{d\varphi}{du} \right) \left( \frac{dr}{du} \right) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{du^2} + \frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial \theta} \left( \frac{d\theta}{du} \right)^2 - \sin \theta \cos \theta \left[ 1 + \frac{1}{2} \tan \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln A) \right] \left( \frac{d\varphi}{du} \right)^2 + \frac{1}{2Ar^2} \frac{\partial B}{\partial \theta} \left( \frac{dt}{du} \right)^2 - \frac{1}{2Ar^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} \left( \frac{dr}{du} \right)^2 \\ + 2 \left[ \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\ln A) \right] \left( \frac{d\theta}{du} \right) \left( \frac{dr}{du} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \left( \frac{d\varphi}{du} \right) \left( \frac{dr}{du} \right) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{du^2} + 2 \left[ \cot \theta + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln A) \right] \left( \frac{d\theta}{du} \right) \left( \frac{d\varphi}{du} \right) + 2 \left[ \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\ln A) \right] \left( \frac{d\varphi}{du} \right) \left( \frac{dr}{du} \right) + \frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial \theta} \left( \frac{dr}{du} \right)^2 \\ + \frac{1}{2A} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial B}{\partial \varphi} \left( \frac{dt}{du} \right)^2 - \frac{1}{2A} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \left( \frac{dr}{du} \right)^2 - \frac{1}{2A} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \left( \frac{d\theta}{du} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{d^2 t}{du^2} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \left( \frac{dt}{du} \right) \left( \frac{dr}{du} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \theta} \left( \frac{dt}{du} \right) \left( \frac{d\theta}{du} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \varphi} \left( \frac{dt}{du} \right) \left( \frac{d\varphi}{du} \right) = 0 \quad (11)$$

De esta última ecuación podemos obtener directamente la integral primera

$$B(r, \theta, \varphi) \frac{dt}{du} = K_0, \quad (12)$$

en la que  $K_0$  es una constante que puede tomarse como la unidad si se reescala adecuadamente el parámetro  $u$ .

Para el caso de una geodésica nula tendremos, a partir de (6), que

$$B(r, \theta, \varphi) \left( \frac{dt}{du} \right)^2 - A(r, \theta, \varphi) \left[ \left( \frac{dr}{du} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{du} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{du} \right)^2 \right] = 0. \quad (13)$$

Ahora tomamos las ecuaciones (12) y (13) y las sustituimos en las ecuaciones (8), (9) y (10), de lo que se obtiene

$$\frac{d^2 r}{du^2} - r \left( \frac{d\theta}{du} \right)^2 - r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{du} \right)^2 + \frac{d}{du} (\ln A) \frac{dr}{du} = \frac{1}{2AB} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \ln \left( \frac{A}{B} \right) \right], \quad (14)$$

$$\frac{d^2 \theta}{du^2} + \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{du} \right) \left( \frac{d\theta}{du} \right) - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{du} \right)^2 + \frac{d}{du} (\ln A) \frac{dr}{du} = \frac{1}{2ABr^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \ln \left( \frac{A}{B} \right) \right], \quad (15)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{du^2} + \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{du} \right) \left( \frac{d\varphi}{du} \right) + 2 \cot \theta \frac{d\varphi}{du} + \frac{d}{du} (\ln A) \frac{dr}{du} = \frac{1}{2ABr^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \ln \left( \frac{A}{B} \right) \right]. \quad (16)$$

Ahora tomamos las ecuaciones (13), (14) y (15) y las multiplicamos, respectivamente, por  $e_r$ ,  $re_\theta$  y  $r \sin \theta e_\varphi$ , donde  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  y  $\vec{e}_\varphi$  son los vectores considerados unitarios en las direcciones espaciales. A continuación tomamos los resultados de estas multiplicaciones y los sumamos, obteniendo así

$$\frac{d}{du} \left[ A(r, \theta, \varphi) \left( \frac{dr}{du} \right) \right] = \frac{1}{2B} \nabla \left[ \ln \left( \frac{A}{B} \right) \right], \quad (17)$$

donde  $\vec{\nabla}$  es el operador vectorial gradiente para nuestro sistema de coordenadas esférico

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Teniendo en cuenta que nos encontramos en una métrica isótropa, se ha de cumplir la condición  $A = B^{-1}$ . Por tanto podremos escribir la ecuación (17) de la forma

$$\frac{d}{du} \left[ A(r, \theta, \varphi) \left( \frac{d\vec{r}}{du} \right) \right] = \vec{\nabla} A. \quad (18)$$

Esta ecuación que hemos obtenido es la ecuación diferencial de un rayo de luz en un espacio curvo, obtenida a partir de la ecuación de las geodésicas nulas en una métrica de tipo isótropo. Esta ecuación coincide con la de un rayo de luz (1) que se propaga en un medio inhomogéneo con índice de refracción  $n = n(r, \theta, \varphi)$ ,

$$\frac{d}{ds} \left[ n(r, \theta, \varphi) \left( \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \right] = \vec{\nabla} n. \quad (19)$$

En el caso del espacio isótropo el papel del índice de refracción  $n$  lo juega el coeficiente  $A$ . Sin embargo en un medio con simetría esférica (campo gravitatorio generado por una masa esférica estática), el índice de refracción (coeficiente  $A$ ) solo depende de la distancia a su origen de coordenadas. Esta distancia es la que corresponde al parámetro  $r$ . Desde este momento, supondremos que

$$A(r, \theta, \varphi) = A(r),$$

con esta nueva condición, reescribiremos la ecuación (18) de esta forma

$$\frac{d}{ds} \left[ A(r) \left( \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \right] = \vec{\nabla} A(r). \quad (20)$$

o de la siguiente manera



$$\frac{dA}{ds} \left( \frac{d\vec{r}}{ds} \right) + A \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = \vec{\nabla} A \quad (21)$$

Si tenemos en cuenta que

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dr}{ds} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{ds} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \frac{d\varphi}{ds} \vec{e}_\varphi \quad (22)$$

entonces podremos desarrollar el sistema de la ecuación (21) de la siguiente manera

$$\frac{dA}{ds} \left( \frac{dr}{ds} \right) + A \frac{d}{ds} \left( \frac{dr}{ds} \right) = \frac{\partial A}{\partial r},$$

$$\frac{dA}{ds} \left( r \frac{d\theta}{ds} \right) + A \frac{d}{ds} \left( r \frac{d\theta}{ds} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta}, \quad (23)$$

$$\frac{dA}{ds} \left( r \sin \theta \frac{d\varphi}{ds} \right) + A \frac{d}{ds} \left( r \sin \theta \frac{d\varphi}{ds} \right) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A}{\partial \varphi}.$$

Ahora consideraremos el caso de un campo gravitatorio débil, para el cual,  $A(r) = 1 + \frac{2m}{r}$ . De esta manera, las ecuaciones del sistema (23) tomarán la siguiente forma

$$\frac{d^2}{ds^2} r(s) = \frac{2m}{r(r+2m)} \left[ \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - 1 \right],$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \theta(s) = -\frac{1}{r+2m} \left( \frac{dr}{ds} \right) \left( \frac{d\theta}{ds} \right), \quad (24)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \varphi(s) = -\frac{1}{r+2m} \left( \frac{dr}{ds} \right) \left( \frac{d\theta}{ds} \right) - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left( \frac{d\theta}{ds} \right) \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)$$

en las que  $\vec{r}(s) = (r(s), \theta(s), \varphi(s))$  representa la geometría de la curva que sigue un rayo de luz en el espacio que corresponde a la métrica explicada anteriormente

$$ds^2 = \left( 1 + \frac{2m}{r} \right)^{-1} dt^2 - \left( 1 + \frac{2m}{r} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (25)$$

De esta forma podemos resolver las ecuaciones del sistema (24), aunque despreciando los términos  $O\left(\frac{m}{r^2}\right)$ . Las expresiones que se obtienen para los parámetros  $r(s)$ ,  $\theta(s)$  y  $\varphi(s)$  son las siguientes

$$\begin{aligned} r(s) &= c_1 s + c_2, \\ \theta(s) &= c_3 \int \frac{ds}{r(s) + 2m} + c_4, \\ \varphi(s) &= c_5 \int \frac{ds}{(r(s) + 2m) \sin \theta} + c_6 \end{aligned} \quad (26)$$

donde  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$ ,  $c_5$  y  $c_6$  son constantes de integración.

La derivada de  $\vec{r}(s)$  en cada uno de los puntos de la curva, nos proporciona la tangente a dicha curva. En el caso específico de una geodésica en el espacio que une dos puntos, uno de ellos el planeta exterior que se quiere observar y el otro el punto de observación (observador terrestre), la derivada en el punto desde el que observamos el planeta exterior nos proporcionará la dirección a la que hay que apuntar el telescopio para verlo.

Podemos suponer, por comodidad, que el observador y la fuente están en el mismo plano. De esta forma,  $\theta = \pi/2$  y elegiremos un parámetro  $\hat{s}$  (que se relaciona con  $s$  de la forma  $\hat{s} = as + b$ ). Los valores del parámetro  $s$  en el punto de observación serán  $\hat{s}(s_0) = 0$ , en el punto de observación, y  $\hat{s}(s_1) = 1$ , en el punto de emisión. Conociendo la posición del observador  $(r_0, \pi/2, \varphi_0)$  y la del objeto que queremos observar  $(r_1, \pi/2, \varphi_1)$  en un instante dado, usando la primera ecuación del sistema (26) podemos escribir que:

$$r(0) = c_2 \equiv r_0 \quad (27)$$

$$r(1) = c_1 + r_0 \equiv r_1$$

De esta manera podremos obtener el valor de las constantes  $c_1 = r_1 - r_0$  y  $c_2 = r_0$ , y, por tanto,  $r(\hat{s}) = (r_1 - r_0)\hat{s} + r_0$ .

Si ahora suponemos que para  $\hat{s} = 0$  la coordenada  $\varphi$  del observador es  $\varphi_0$  y que para  $\hat{s} = 1$  la coordenada es  $\varphi_1$ , podríamos escribir la tercera ecuación del sistema (26) con la forma:

$$\varphi(\hat{s}) = \frac{c_5}{c_1} \ln(c_1 \hat{s} + c_2 + 2m) + c_6,$$

obteniendo así el sistema

$$\varphi_0 = \frac{c_5}{r_1 - r_0} \ln(r_0 + 2m) + c_6$$

$$\varphi_1 = \frac{c_5}{r_1 - r_0} \ln(r_1 + 2m) + c_6 \quad (28)$$

que nos proporcionará las constantes  $c_5$  y  $c_6$

$$c_5 = \frac{(\varphi_1 - \varphi_0)(r_1 - r_0)}{\ln\left(\frac{r_1 + 2m}{r_0 + 2m}\right)},$$

$$c_6 = \varphi_0 - \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\ln\left(\frac{r_1 + 2m}{r_0 + 2m}\right)} \ln(r_0 + 2m).$$

Como se ha dicho con anterioridad, podremos obtener el vector tangente en cada punto de la geodésica si derivamos respecto del parámetro  $s$  las expresiones del sistema (26). No debemos olvidar tener en cuenta la expresión (22):

$$\frac{d\vec{r}}{ds}(s) = \frac{d\vec{r}}{d\hat{s}}(\hat{s}) \frac{d\hat{s}}{ds}(s) = a \left( \frac{dr}{d\hat{s}}, r(\hat{s}) \frac{d\theta}{d\hat{s}}, r(\hat{s}) \frac{d\varphi}{d\hat{s}} \right) = a \left( c_1, 0, \frac{c_5 r(\hat{s})}{c_1 \hat{s} + c_2 + 2m} \right) \quad (29)$$

Obtendremos la dirección del telescopio en el punto de observación al hacer  $\hat{s} = 0$  en la expresión (29)

$$\frac{dr}{ds}(s_0) = a \left( c_1, 0, \frac{c_5 r_0}{c_2 + 2m} \right) \quad (30)$$

donde las constantes  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_5$  las encontramos calculadas en los sistemas (25) y (26), y el factor  $m$  es el valor de la masa del cuerpo que genera el campo gravitatorio (en este caso el Sol), terminando así el problema que habíamos planteado. No es necesario conocer el valor de la constante  $a$  que aparece en el cambio de parámetro de las geodésicas, ya que solo afecta al módulo del vector y no a su dirección. Sin embargo podemos calcular el valor de  $a$  si tenemos en cuenta que el vector de la expresión (30) es unitario.

## 5. CONCLUSIONES

En resumen, podemos conocer las trayectorias de los rayos de luz en el espacio, de manera que sabremos en qué dirección tendremos que colocar el telescopio para observar un cuerpo. Para ello lo primero que debemos saber son las posiciones del observador y de la fuente de observación. Además debemos tener muy en cuenta como varían las geodésicas en función de la masa de un cuerpo masivo y del índice de refracción de un medio isótropo (ecuación 18). Una vez hemos conocido todos estos datos hemos desarrollado un modelo general y aproximado para cualquier planeta del sistema solar.

Como podemos ver a lo largo del desarrollo del trabajo, la presencia de un cuerpo masivo deforma la geometría del espacio-tiempo. Las trayectorias de los cuerpos que se muevan en su campo de influencia se verán también afectadas. De esta manera, la observación de estos cuerpos también será diferente ya que los rayos de luz siguen trayectorias que son geodésicas nulas (trayectorias de los fotones).

Para llegar a las ecuaciones finales hemos utilizado como herramienta principal geometrías curvas debidas a la masa, pero podríamos haber llegado al mismo resultado utilizando la óptica geométrica clásica como método. Según la óptica geométrica clásica, en el caso de una geodésica recta, tenemos que  $n(r) = 1$  y en el caso de una geodésica curva  $n(r) = f(r)$ . Sin embargo, en el caso de utilizar como método el estudio de las geometrías curvas, veremos que una geodésica recta significaría que no existe gravitación y, por tanto,  $A(r) = 0$  y para el caso de una geodésica curva sí que habría una fuerza gravitatoria motivada por la masa de un objeto  $m$ , de modo que  $A(r) \equiv g(r)$ . Vemos que, a pesar de ser caminos distintos, al final podemos obtener el mismo resultado.

Desde un punto de vista matemático es muy interesante el cambio de parámetros que debemos hacer en  $s$  para poder obtener los valores de las constantes de las ecuaciones de las geodésicas ( $\hat{s} = as + b$ ). Sin esta transformación de los parámetros no sería posible obtener las constantes y, por lo tanto, tampoco el modelo que nos proporcionara la dirección a la que debemos apuntar nuestro sistema de observación para cualquier planeta.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

[1]: Rodríguez J. La luz y la óptica geométrica. En: Rodríguez J. Fundamentos de Óptica Geométrica; Oviedo, Principado de Asturias (España): Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo; 1997: Pag. 24-25

[2]: Lipschutz M. Capítulo 9: Primera y Segunda Formas Fundamentales. En: Lipschutz M. Teoría y Problemas de Geometría Diferencial; Ciudad de México (México): McGraw-Hill; 1971: Pag 182-185

[3]: Callahan JJ. Chapter 6: Intrinsic Geometry. En: Callahan JJ. The Geometry of Spacetime; San Francisco, CAL (USA): Springer; 1999: Pag. 268-280

[4]: Dubrovin BA, Fomenko AT, Nóvikov SP. Geometría en una Región del Espacio. Nociones Fundamentales. En: Dubrovin BA, Fomenko AT, Nóvikov SP. Geometría Moderna; Moscú (Rusia): URSS; 2000: Pag. 23-30

[5]: Sokolnikoff IS. Teoría Tensorial. En: Sokolnikoff IS. Análisis Tensorial: Teoría y Aplicaciones a la Geometría y Mecánica de los Medios Continuos; Madrid (España): Index-Prial; 1951: Pag. 98-107

[6]: Dubrovin BA, Fomenko AT, Nóvikov SP. Cálculo Diferencial de Tensores. En: Dubrovin BA, Fomenko AT, Nóvikov SP. Geometría Moderna; Moscú (Rusia): URSS; 2000: Pag. 206-222

[7]: Carrol SM. Chapter 3: Curvature. En: Carrol SM. Spacetime and Geometry; San Francisco, CAL (USA): Addison Wesley; 2004: Pag. 102-103

[8]: Landau LD, Lifshitz EM. Capítulo 1: El Principio de la Relatividad. En: Landau LD, Lifshitz E.M. Teoría Clásica de los Campos; Barcelona (España): Reverté S.A; 1966: Pag. 1-13, 20-23

[9]: Callahan JJ. Chapter 5: Surfaces and Curvature. En: Callahan JJ. The Geometry of Spacetime; San Francisco, CAL (USA): Springer; 1999: Pag. 203-215

[10]: WU Xue-jun, XU Chong-ming. Null geodesic equation equivalent to the geometric optics equation. Communications in Theoretical Physics. 1988; 9: 119-125

Landau LD, Lifshitz EM. Capítulo 10: Partícula en un Campo Gravitatorio. En: Landau LD, Lifshitz EM. Teoría Clásica de los Campos; Barcelona (España): Reverté S.A; 1966: Pag. 298-304

Sokolnikoff IS. Geometría. En: Sokolnikoff IS. Análisis Tensorial: Teoría y Aplicaciones a la Geometría y Mecánica de los Medios Continuos; Madrid (España): Index-Prial; 1951: Pag. 193-195

Lipschutz M. Capítulo 3: Concepto de Curva. En: Lipschutz M. Teoría y Problemas de Geometría Diferencial; Ciudad de México (México): McGraw-Hill; 1971: Pag 45-54

Lipschutz M. Capítulo 8: Concepto de Superficie. En: Lipschutz M. Teoría y Problemas de Geometría Diferencial; Ciudad de México (México): McGraw-Hill; 1971: Pag 159-161

DOCTORQANTICO. Historia de la luz. <https://dotorqantico.wordpress.com/2011/11/30/que-es-la-mecanica-cuantica-una-historia-de-la-luz/> (17 de febrero de 2016).

Ruiz S. La luz, algo sobre su historia. <http://labellateoria.blogspot.com.es/2007/02/la-luz-algo-sobre-su-historia.html> (17 de febrero de 2016).

Santamaría R.

“La geometría de los rayos de luz y el problema de observación astronómica”

Ernst O. El “éter”. <https://sites.google.com/site/teoriatiempospacio/el-eter> (20 de febrero de 2016).

Universocuantico. Experimento de Michelson – Morley. <https://universocuantico.wordpress.com/2009/06/14/experimento-de-michelson-morley/> (20 de febrero de 2016)